راویتگران

الگوهای بی‌الگو

فرید حسینی، دبیر ریاضی و دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی
حمید فرهادی، دبیر ریاضی و دانشجوی دکتری آنالیز تابعی دانشگاه کردستان

مقاله ارائه شده در پانزدهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران- بوشهر- ۳ تا ۷ بهمن ۱۳۹۶

اشاره

به دلیل اهمیت نقش معلم، برنامه‌های آموزش معلمان از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی در نظر دارد که این مهم را به‌عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به‌همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده‌است تا از طریق آن، بتوانیم رابطهٔ نزدیک‌تری با معلمان ریاضی برقــرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به‌وجود می‌آورد تا به تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلم می‌جوشد، بپردازند. آن‌گاه نظریه‌ها به عمل درمی‌آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند هم‌چنان ادامه پیدا می‌کند.

از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایت‌های خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن اســت. معلمان عزیز باید به اهمیت تجربه‌های خود واقف شوند و با پویایی به غنی‌تر کردن آن‌ها بپردازند.

در ضمن، گاهی هم به‌جای شنیدن روایت از زبان معلم، می‌توان کلاس وی را مورد مشاهده قرار داده و پس از تأیید همان معلم، روایت را از زبان مشاهده‌گر شنید.

رشد آموزش ریاضی

چکیده

اهمیــت الگو و دنبالــه در ریاضیــات، مبرهن اســت تا جایی که برخی ریاضیــات را علم مطالعهٔ الگوها می‌داننــد. با توجه به پررنــگ کردن الگوها در برنامه‌های درســی و نتایج خــوب دانش‌آموزان در آزمون‌های تیمز بازنگری و ارتقای ســطح مطالب ضروری به نظر می‌رســد. در این راســتا این مقاله نقدی بر نحوهٔ ارائهٔ بحث الگو و دنباله در بخش سوم از فصل اول کتاب ریاضی (۱) دهم رشته‌های ریاضی فیزیک و علوم تجربی (چاپ ۹۶) می‌باشد.

کلید واژه‌ها: الگو، دنباله، تناوب، جملهٔ عمومی

مقدمه

با مطالعهٔ کتاب‌های ریاضــی دوره‌های ابتدایی، متوســطهٔ اول و متوســطهٔ دوم متوجه بها دادن به الگوها در برنامهٔ درسی می‌شــویم به‌گونه‌ای که در ریاضــی دهــم روال ارائهٔ مطلب رســالت خود را به سرانجام رسانده و از آن پس از تعریف‌های استاندارد بیشتر کمک گرفته می‌شود. در همین راستا بحث را روی الگو و دنبالهٔ ریاضی (۱) دهم متمرکز می‌کنیم.

الگوها و دنباله‌ها:

با توجه به صفحهٔ آغازین بحث بخش سوم از فصل اول:

الگوها ساختار منظم‌اند که ممکن است تکرارشونده یا رشدکننده و یا ترکیبی از این دو باشد. با توجه به این تعریف اولین مثال آغازین بحث به چالش کشیده می‌شود و بی‌الگویی در این الگوها از همین مثال آغاز می‌شود. به‌عنوان مثال ادامهٔ این الگو طبق تعریف می‌تواند موارد زیر (از بین بی‌شمار مورد ممکن) باشد.

درس سوم: الگو و دنباله

الگو

مثال

به شکل‌های زیر و تعداد چوب کبریت‌های به‌کار رفته در هر یک از آنها توجه کنید.

n :شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	۴	...	n	...
a_n :تعداد چوب‌کبریت‌ها	۵	۸	۱۱	...	...	...	...
رابطه بین n و a_n	$a_1=5$	$a_2=8$	$a_3=11$	...	...	$a_n=...$	...

به‌عنوان مثال ملاحظه می‌شود که، «تعداد چوب کبریت‌های شکل اول برابر ۵ است» که این مطلب را به‌طور خلاصه به‌صورت $a_1=5$ نشان داده‌ایم (می‌خوانیم: a اندیس ۱ برابر ۵). عبارت‌های a_1، a_2 و a_3 متغیرهای اندیس‌دار[1] نامیده می‌شوند که مقادیر آنها به‌ترتیب ۵، ۸ و ۱۱ است. به این اعداد جملات الگو هم گفته می‌شود. پس در واقع، عدد ۵ جملهٔ اول الگوست؛ ۸ جملهٔ دوم آن و به همین ترتیب الی آخر.

a_1	a_2	a_3
۵	۸	۱۱

الف) با این نمادگذاری، a_4 نشان‌دهندهٔ چیست و مقدار آن چقدر است؟

ب) a_n به چه معناست؟

پ) آیا می‌توانید حاصل a_n را بر حسب n به‌دست آورید؟ برای این کار فعالیت بعد را انجام دهید.

۱ـ در سال‌های گذشته با متغیرهایی مثل x، y و z سروکار داشتیم که اسم آنها تک حرفی بود؛ در حالی که نام متغیرهای اندیس‌دار که در اینجا به کار می‌بریم، دو بخشی است. پس تفاوت این دو نوع متغیر، تنها در شکل نام‌گذاری آنهاست و از نظر ماهیت، تفاوتی با هم ندارند.

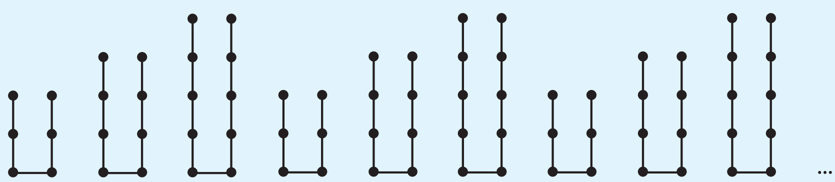
حرم حضرت معصومه (س)

دنیای اطراف ما سرشار از الگوهای مختلفی است. به‌عنوان نمونه، پیدایش شبانه روز و تغییر فصول مختلف سال جلوه‌ای از الگوی حاکم بر طبیعت است. از سوی دیگر نظم و قانونمندی‌های موجود در یک الگو به خودی خود برای ما جذاب است. چه بسا ممکن است طرح‌های روی یک گل آفتابگردان، شکل‌های هندسی روی یک سطح کاشی‌کاری شده یا ماریچ‌های روی میوهٔ آناناس توجه شما را به خود جلب کرده باشند. به‌طور کلی می‌توان گفت الگو یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع یا اعداد است که ممکن است تکرار شونده یا رشد کننده یا ترکیبی از این دو باشد.

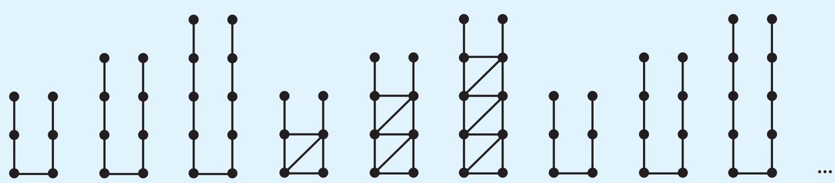
از طرف دیگر یکی از رسالت‌های مهم ریاضیات، مدل‌سازی کردن پدیده‌های طبیعی و پی‌بردن به الگوهای نهفته در آنهاست. اهمیت این موضوع به‌قدری است که برخی از ریاضیدانان معتقدند که ریاضی عبارت است از علم مطالعهٔ الگوها.

۱۴

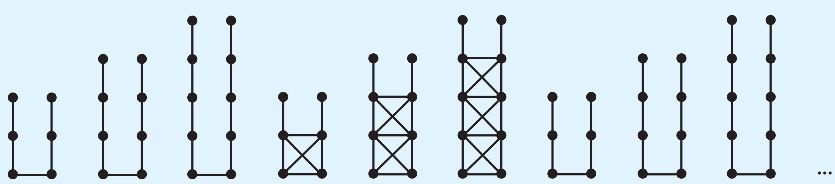
۱. با توجه به امکان متناوب بودن الگو می‌تواند به صورت زیر ادامه پیدا کند



۲. و یا

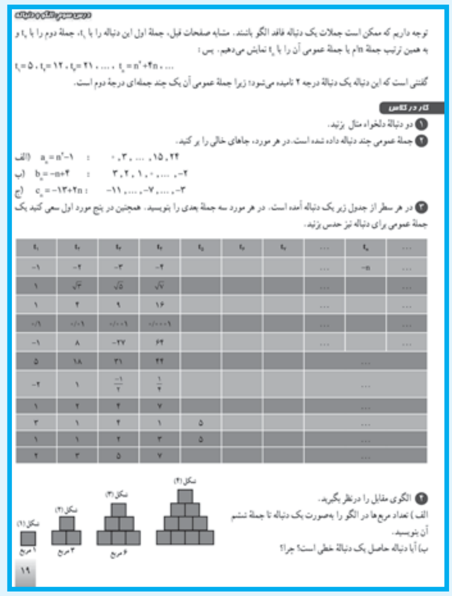


۳. و یا



با این بررسی می‌توان نتیجه گرفت ادامهٔ روند می‌تواند بی‌شمار الگو را تولید کند و از چالش‌های بخش این است که کتاب یکی از حالت‌ها را تأکید کرده است. (برای مثال‌های دیگر کتاب نیز این مشکل وجود دارد)

پس از معرفی دنبالـــه در صفحۀ ۱۹ با این کار در کلاس مواجه می‌شویم :


درس سوم: الگو و دنباله

توجه داریم که ممکن است جملات یک دنباله فاقد الگو باشند. مشابه صفحات قبل، جملۀ اول این دنباله را با $t_۱$، جملۀ دوم را با $t_۲$ و به همین ترتیب جملۀ nام یا جملۀ عمومی آن را با t_n نمایش می‌دهیم. پس:

$t_۱=۵ ، t_۲=۱۲ ، t_۳=۲۱ ، ... ، t_n=n^۲+۲n ، ...$

گفتنی است که این دنباله یک دنبالۀ درجه ۲ نامیده می‌شود؛ زیرا جملۀ عمومی آن یک چند جمله‌ای درجۀ دوم است.

کار در کلاس

۱ دو دنبالۀ دلخواه مثال بزنید.

۲ جملۀ عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد، جاهای خالی را پر کنید.

الف) $a_n=n^۲-۱$: ۰ ، ۳ ، ... ، ۱۵ ، ۲۴

ب) $b_n=-n+۴$: ۳ ، ۲ ، ۱ ، ۰ ، ... ، −۲

ج) $c_n=-۱۳+۲n$: −۱۱ ، ... ، −۷ ، ... ، −۳

۳ در هر سطر از جدول زیر یک دنباله آمده است. در هر مورد سه جملۀ بعدی را بنویسید. همچنین در پنج مورد اول سعی کنید یک جملۀ عمومی برای دنباله نیز حدس بزنید.

$t_۱$	$t_۲$	$t_۳$	$t_۴$	$t_۵$	$t_۶$	$t_۷$	...	t_n	...
−۱	−۲	−۳	−۴				...	−n	...
۱	$\sqrt{۴}$	$\sqrt{۵}$	$\sqrt{۷}$				...		...
۱	۴	۹	۱۶				...		...
۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱				...		...
−۱	۸	−۲۷	۶۴				...		...
۵	۱۸	۳۱	۴۴				...		
−۲	۱	$\frac{-۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$				...		
۱	۲	۴	۷				...		
۳	۱	۴	۱	۵			...		
۱	۱	۲	۳	۵			...		
۲	۳	۵	۷				...		

۴ الگوی مقابل را درنظر بگیرید.

الف) تعداد مربع‌ها در الگو را به‌صورت یک دنباله تا جملۀ ششم آن بنویسید.

ب) آیا دنبالۀ حاصل یک دنبالۀ خطی است؟ چرا؟

شکل (۱) ۱ مربع

شکل (۲) ۳ مربع

شکل (۳) ۶ مربع

شکل (۴)

۱۹

لاگرانژ بـــرای دنباله‌هایی که چند جملۀ اول آن‌ها $a_۱, a_۲, a_۳, ..., a_k$ مشخص اســـت فرمول زیبای زیر را پیشنهاد می‌دهد:

$$a_n = \frac{(n-۲)(n-۳)...(n-k)}{(۱-۲)(۱-۳)...(۱-k)}a_۱ + \frac{(n-۱)(n-۳)...(n-k)}{(۲-۱)(۲-۳)...(۲-k)}a_۲ + ... + \frac{(n-۲)(n-۲)...(n-(k-۱))}{(k-۱)(k-۲)...(k-(k-۱))}a_k \quad (۱)$$

ولی آیا این تنها جمله عمومی ممکن است؟ برای باز شدن موضوع روی قسمت اول سؤال سه کار در کلاس تصویر بالا متمرکز می‌شویم. به‌عبارتی می‌خواهیم برای موجود زیر! چند جملۀ بعدی و سپس در صورت امکان جملۀ عمومی بیابیم:

$-۱, -۲, -۳, -۴, ...$

باروش لاگرانژ به جملۀ عمومی زیر می‌رسیم :

$$a_n = \frac{(n-۲)(n-۳)(n-۴)}{۴} + \frac{(n-۱)(n-۳)...(n-۴)}{-۱} - \frac{۲(n-۲)(n-۲)...(n-۳)}{۳} \quad (۲)$$

که با به‌دســـت آوردن چهار جملۀ اول به ظرافت دقت لاگرانژ بیشتر پی می‌بریم:

$$a_۱ = -۱+۰+۰+۰ = -۱$$
$$a_۲ = ۰-۲+۰+۰ = -۲$$
$$a_۳ = ۰+۰-۳+۰ = -۳$$
$$a_۴ = ۰+۰+۰-۴ = -۴$$

و با تعریف دنبالۀ

$$b_n = (n-۱)(n-۲)(n-۳)(n-۴)c_n + a_n \quad (۳)$$

متوجه می‌شویم باز می‌توان بی‌شمار جملۀ عمومی را پیشنهاد داد.

حال اگر از منظر دیگری به این دنباله نگاه کنیم: به‌عبارتی فرض ما براین باشد که چهار جملۀ اول این دنباله قرینۀ اعـــداد تصادفی حاصل از پرتاب یک تاس بوده باشند

برای ادامۀ دنباله و نوشتن جملۀ عمومی به بن‌بست خواهیم رســـید و گزینۀ جدیدی متولد می‌شود. اینکه جملات بعدی را حدس زد و نوشت غیرممکن است.

نتیجه‌گیری

با بررســـی‌های فوق اینکه چند جملۀ اول دنباله را به ما بدهند و جملات بعدی و به تبع جملۀ عمومی را بخواهد پاسخ بدین گونه است:

چون ممکن است جملات اعداد تصادفی باشند پس نمی‌توان جملات بعدی را حدس زد و یا اینکه بی‌شمار جملۀ عمومی را می‌شود نوشت. حال به دانش‌آموزی که پاســـخ این سؤال را داده باشد (نداده باشد) چه نمره‌ای می‌دهید؟!

پیشنهاد

برای کاستن از چالش‌های ذکر شده در مقاله بهتر است در بیان ســـؤال جملات ممکن بعدی و یا جمله عمومی ممکن درج شود. هرچند با این فرض نیز ایراد این سؤال‌ها به قوت خود باقی خواهد ماند.

سپاسگزاری

با تشکر از اســـتاد ارجمند دکتر سهیلا غلام‌آزاد، خانم مریم بینش و آقای اکبر ترابی که در رفع نواقص مقاله کمک نمودند.

منابع

۱. کتاب درسی ریاضی (۱) پایۀ دهم رشته‌های تجربی رشته‌های ریاضی و فیزیک- تجربی چاپ ۱۳۹۶.

۲. آنالیـــز عددی (۱)، اســـمعیل بابلیان، چاپ ۲ ســـال ۱۳۹۲، ۹۷۸-۹۶۴-۳۸۷-۸۳۳-۷.